C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I, p. 745-748, 1996
Analyse complexe/*Complex Analysis*

Sur un problème d'unicité pour les fonctions méromorphes

Fedor PAKOVITCH

Université de Grenoble-I, Institut Fourier,
Laboratoire de Mathématiques associé au CNRS, BP n° 74,
38402 Saint-Martin-d'Hères CEDEX, France.

Résumé. Dans [1] Yang a posé le problème suivant : Soient $P(z)$ et $Q(z)$ des polynômes complexes de même degré. Est-il vrai que $P^{-1}\{0, 1\} = Q^{-1}\{0, 1\}$ implique que, soit $P = Q$, soit $P+Q = 1$? Dans cette Note, on montre que la réponse à cette question est affirmative et on donne quelques généralisations pour les fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte.

On the uniqueness problem for meromorphic functions

Abstract. *In* [1] *Yang have raised the following problem: Let $P(z)$ and $Q(z)$ be two complex polynomials of the same degree such that $P^{-1}\{0, 1\} = Q^{-1}\{0, 1\}$. Does it follow that either $P = Q$, or $P + Q = 1$? In this Note we show that the answer to this question is affirmative and give some generalizations for meromorphic functions on compact Riemann surface.*

1. Introduction et résultats

Dans [1] Yang a posé le problème d'unicité suivant : *soient $P(z)$ et $Q(z)$ des polynômes complexes de même degré. Est-il vrai que $P^{-1}\{0, 1\} = Q^{-1}\{0, 1\}$ implique que, soit $P = Q$, soit $P + Q = 1$?* Ce problème est discuté dans le cadre de la théorie des fonctions méromorphes et résolu dans quelques cas particuliers dans [2]-[4]. Dans cette Note, on montre que la réponse à la question de Yang est affirmative et on donne quelques généralisations pour les fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte. Rappelons que, pour un ensemble fini $K \subset \mathbb{C}$, le centre du disque de rayon minimal qui contient K est dit *centre de Chebyshev* de K. Le rayon de ce disque est dit *rayon de Chebyshev* de K. Le résultat principal de cette Note, qui implique en particulier une réponse affirmative à la question de Yang, est :

THÉORÈME 1. – *Soient R une surface de Riemann compacte de genre $g = g(R)$ et φ, ψ des fonctions méromorphes sur R telles que pour, un ensemble fini non vide de points $K \subset \mathbb{C}$, on ait l'égalité $\varphi^{-1}\{K\} = \psi^{-1}\{K\}$. Supposons que*

(i) $\operatorname{div}_\infty \varphi = \operatorname{div}_\infty \psi = D$,

Note présentée par Vladimir ARNOLD.

(ii) *il existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que pour tout point* $p \in \operatorname{supp} D$, $\operatorname{ord}_p(\varphi - \lambda\psi) > \operatorname{ord}_p \varphi = \operatorname{ord}_p \psi$.

Alors il existe une rotation du plan complexe σ dont le centre coïncide avec le centre de Chebyshev de l'ensemble K, telle que

1) $\sigma K = K$,

2) $\varphi^{-1}\{x\} = (\sigma \circ \psi)^{-1}\{x\}$ *pour chaque* $x \in K$.

Si, de plus, $\sharp\{K\} \geq 2 + (2g-1)/\deg D$ *(par exemple, si* $\sharp\{K\} \geq 2 + g$*), alors* $\varphi \equiv \sigma \circ \psi$.

En outre, on montre que chaque polynôme complexe $P(z)$ possède une propriété extrémale par rapport à la préimage géométrique L de points α, β de $\mathbb{C}$, qui permet de retrouver (à symétrie près) $P(z)$ dès que l'on connait L, α, β et $\deg P(z)$. Pour cela rappelons, que le polynôme complexe unitaire $P(z)$ de degré n est dit *s'écartant le moins possible de zéro sur le compact* $L \subset \mathbb{C}$ *parmi tous les polynômes complexes unitaires de degré* n, si $\|P\|_L \leq \|Q\|_L$ pour chaque polynôme complexe unitaire $Q(z)$ de degré n, où $\|P\|_L := \max_{z \in L}\{|P(z)|\}$. Il est bien connu (*voir*, par exemple [5], [6]), qu'un tel polynôme est unique, pourvu que le compact L contienne au moins n points. Le deuxième résultat de cette Note est le suivant :

THÉORÈME 2. – *Soient* $P(z)$ *un polynôme complexe unitaire de degré* n *et* α *un nombre complexe non nul. Alors le polynôme* $P(z)$ *est l'unique polynôme de degré* n *qui s'écarte le moins possible de zéro sur le compact* $L = P^{-1}\{-\alpha, \alpha\}$.

2. Démonstrations

Pour un diviseur $D = \sum_{p \in R} o_p \cdot p$ sur R et une fonction θ telle que $\operatorname{supp} \operatorname{div}_\infty \theta \cap \operatorname{supp} D = \varnothing$, désignons par $\sum_D \theta$ la somme $\sum_{p \in R} o_p\, \theta(p)$.

LEMME. – *Soient* R *une surface de Riemann compacte et* φ, ψ *des fonctions méromorphes sur* R *telles que* $\operatorname{div}_\infty \varphi \leq \operatorname{div}_\infty \psi$. *Alors pour chaque* $\eta \in \mathbb{C}$ *on a l'égalité :*

(1) $$\sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta)} \varphi = \eta \sum_{\operatorname{div}_\infty(\psi)} (\varphi/\psi) + \sum_{\operatorname{div}_0(\psi)} \varphi.$$

Démonstration du lemme. – Considérer la forme différentielle $\omega = \frac{\varphi(z)\, d\psi(z)}{\psi(z) - \eta} - \frac{\varphi(z)\, d\psi(z)}{\psi(z)}$ et appliquer le théorème des résidus.

Démonstration du théorème 1. – Il est clair qu'il suffit de démontrer le théorème en supposant que le centre de Chebyshev de l'ensemble K se trouve en zéro. Grâce au lemme précédent, les conditions du théorème impliquent le système suivant :

(2) $$\sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta)} \varphi = n\eta\lambda + \sum_{\operatorname{div}_0 \psi} \varphi, \qquad \sum_{\operatorname{div}_0(\varphi-\eta)} \psi = n(\eta/\lambda) + \sum_{\operatorname{div}_0 \varphi} \psi,$$

où n est le degré des fonctions φ et ψ. Le système ci-dessus implique qu'il existe un nombre complexe η_1, tel que

(3) $$\bar{\lambda} \sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta_1)} \varphi + (1/\bar{\lambda}) \sum_{\operatorname{div}_0(\varphi-\eta_1)} \psi = 0.$$

En substituant dans (2) $\eta = \eta_1$ et en soustrayant le système obtenu au système (2) on obtient :

$$\sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta)} \varphi = n(\eta - \eta_1)\lambda + \sum_{\operatorname{div}_0(\psi-\eta_1)} \varphi, \qquad \sum_{\operatorname{div}_0(\varphi-\eta)} \psi = n(\eta-\eta_1)/\lambda + \sum_{\operatorname{div}_0(\varphi-\eta_1)} \psi,$$

il s'ensuit que

$$|\sum_{\mathrm{div}_0\,(\psi-\eta)} \varphi|^2 = n^2\,|\lambda|^2\,|\eta-\eta_1|^2 + |\sum_{\mathrm{div}_0\,(\psi-\eta_1)} \varphi|^2 + 2\,n\,\mathrm{Re}\,\{(\bar\eta-\bar\eta_1)\,\bar\lambda \sum_{\mathrm{div}_0\,(\psi-\eta_1)} \varphi\},$$

$$|\sum_{\mathrm{div}_0\,(\varphi-\eta)} \psi|^2 = n^2\,\frac{1}{|\lambda|^2}\,|\eta-\eta_1|^2 + |\sum_{\mathrm{div}_0\,(\varphi-\eta_1)} \psi|^2 + 2\,n\,\mathrm{Re}\,\{(\bar\eta-\bar\eta_1)\,\frac{1}{\bar\lambda} \sum_{\mathrm{div}_0\,(\varphi-\eta_1)} \psi\}.$$

En ajoutant les égalités ci-dessus, en tenant compte de la formule (3), on obtient :

$$|\sum_{\mathrm{div}_0\,(\psi-\eta)} \varphi|^2 + |\sum_{\mathrm{div}_0\,(\varphi-\eta)} \psi|^2 = n^2\,|\eta-\eta_1|^2\left(|\lambda|^2 + \frac{1}{|\lambda|^2}\right) + |\sum_{\mathrm{div}_0\,(\psi-\eta_1)} \varphi|^2 + |\sum_{\mathrm{div}_0\,(\varphi-\eta_1)} \psi|^2.$$

Désignons par r le rayon de Chebyshev de K. Puisque pour $\eta \in K$ arbitraire on a :

$$|\sum_{\mathrm{div}_0\,(\varphi-\eta)} \psi| \le nr, \qquad |\sum_{\mathrm{div}_0\,(\psi-\eta)} \varphi| \le nr,$$

on conclut que pour chaque $\eta \in K$

$$2\,n^2\,r^2 \ge n^2\,|\eta-\eta_1|^2\left(|\lambda|^2 + \frac{1}{|\lambda|^2}\right) + |\sum_{\mathrm{div}_0\,(\psi-\eta_1)} \varphi|^2 + |\sum_{\mathrm{div}_0\,(\varphi-\eta_1)} \psi|^2. \tag{4}$$

Or, $|\lambda|^2 + 1/|\lambda|^2 \ge 2$ et l'égalité est possible si et seulement si $|\lambda| = 1$. De plus, on a $\max_{\eta\in K} |\eta-\eta_1|^2 \ge r^2$ avec égalité si et seulement si $\eta_1 = 0$. Donc l'inégalité (4) implique que $\eta_1 = 0$, $\sum_{\mathrm{div}_0\,\psi} \varphi = 0$, $\sum_{\mathrm{div}_0\,\varphi} \psi = 0$, et grâce à (2) on obtient le système :

$$\sum_{\mathrm{div}_0\,(\psi-\eta)} \varphi = n\,\lambda\eta, \qquad \sum_{\mathrm{div}_0\,(\varphi-\eta)} \psi = n\,(\eta/\lambda),$$

avec $|\lambda| = 1$. Soit $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$, où $K_i := \{z \in K,\ |z| = d_i\}$ et $d_1 < d_2 < \ldots < d_m = r$. En substituant dans la première équation du système ci-dessus $\eta = x_0$, pour $x_0 \in K_m$ arbitraire, et en utilisant l'inégalité triangulaire, on conclut que $\psi^{-1}\{x_0\} \subset \varphi^{-1}\{\lambda x_0\}$, il s'ensuit en particulier que $\lambda x_0 \in K_m$. De manière analogue, en substituant dans la deuxième équation $\eta = \lambda x_0$ (en tenant compte du fait que $\lambda x_0 \in K_m$), on conclut que $\varphi^{-1}\{\lambda x_0\} \subset \psi^{-1}\{x_0\}$. Donc $\varphi^{-1}\{\lambda x_0\} = \psi^{-1}\{x_0\}$. Puisque les mêmes raisonnements sont valables pour chaque $x \in K_m$, on en conclut que $\lambda K_m = K_m$ et que $\varphi^{-1}\{x\} = (\lambda\psi)^{-1}\{x\}$ pour chaque $x \in K_m$. Maintenant, comme $\varphi^{-1}\{K_m\} = \psi^{-1}\{K_m\}$, on a $\varphi^{-1}\{\bigcup_{i=1}^{m-1} K_i\} = \psi^{-1}\{\bigcup_{i=1}^{m-1} K_i\}$, et nous pouvons conclure de la même façon que $\varphi^{-1}\{x\} = (\lambda\psi)^{-1}\{x\}$ pour chaque $x \in K_{m-1}$ avec $\lambda K_{m-1} = K_{m-1}$ et ainsi de suite. Donc $\varphi^{-1}\{x\} = (\lambda\psi)^{-1}\{x\}$ pour chaque $x \in K$ et $\lambda K = K$.

Pour finir la démonstration du théorème, estimons le cardinal de l'ensemble $\varphi^{-1}\{K\}$. Pour cela notons que si $x \in K$ et $\mathrm{div}_0\,(\varphi - x) = \sum_{p\in R} o_p\,(x)\cdot p$, alors chaque point p ayant $o_p\,(x) \ge 1$ a pour multiplicité $o_p\,(x) - 1$ dans $\mathrm{div}_0\,(d\varphi)$, ce qui implique que

$$\sum_{x\in K}\ \sum_{p\in\varphi^{-1}\{x\}} (o_p\,(x) - 1) \le \deg \mathrm{div}_0\,(d\varphi).$$

D'autre part

$$\sum_{x \in K} \sum_{p \in \varphi^{-1}\{x\}} (o_p(x) - 1) = \sum_{x \in K} \deg \operatorname{div}_0(\varphi - x) - \sum_{x \in K} \sharp\{\varphi^{-1}\{x\}\} = \sharp\{K\} n - \sharp\{\varphi^{-1}\{K\}\}.$$

Donc

$$(5) \qquad \sharp\{\varphi^{-1}\{K\}\} \geq \sharp\{K\}\, n - \deg \operatorname{div}_0(d\varphi).$$

Puisque $\operatorname{div}(d\varphi)$ est dans la classe canonique, $\deg \operatorname{div}(d\varphi) = 2g - 2$, donc

$$(6) \qquad \deg \operatorname{div}_0(d\varphi) = \deg \operatorname{div}_\infty(d\varphi) + 2g - 2 = n + k + 2g - 2,$$

où $k = \sharp\{\operatorname{supp} \operatorname{div}_\infty \varphi\}$. Maintenant (5) et (6) avec la condition $\sharp\{K\} \geq 2 + (2g-1)/n$ impliquent que $\sharp\{\varphi^{-1}\{K\}\} \geq n - k + 1$, il en découle l'égalité $\varphi = \lambda\psi$, puisque l'ordre de la fonction $\varphi - \lambda\psi$ est au plus $n - k$. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

Démonstration du théorème 2. – Soit $\bar{P}(z) = z^n + \tilde{p}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \tilde{p}_0$ un polynôme complexe unitaire de degré n. En utilisant le lemme, on conclut que

$$\sum_{\operatorname{div}_0(P-\alpha)} \tilde{P} - \sum_{\operatorname{div}_0(P+\alpha)} \tilde{P} = 2n\alpha.$$

Donc $2n\,|\alpha| \leq 2n \max_{z \in L} |\tilde{P}(z)|$, et $\|\tilde{P}\|_L \geq \|P\|_L = |\alpha|$. Puisque $\sharp\{L\} \geq n+1$, l'unicité est conséquence du théorème cité dans l'introduction.

Remarque. – Le théorème 1 ne s'étend pas aux fonctions φ, ψ dont les diviseurs des pôles coïncident, comme on le voit avec l'exemble des fonctions $\varphi = (z^2 - z - 1)/(z^2 + z + 1)$ et $\psi = -(z^2 + 3z + 1)/(z^2 + z + 1)$, pour lesquelles $\varphi^{-1}\{1\} = \{\infty, -1\}$, $\varphi^{-1}\{-1\} = \{0\}$, $\psi^{-1}\{1\} = \{-1\}$, $\psi^{-1}\{-1\} = \{\infty, 0\}$, et, donc $\varphi^{-1}\{-1, 1\} = \psi^{-1}\{-1, 1\}$, pourtant $\varphi^{-1}\{1\}$ n'est pas égal à $\psi^{-1}\{1\}$ ou $\psi^{-1}\{-1\}$.

Remerciements. L'auteur a le plaisir de remercier M. G. Zaidenberg et I. V. Ostrovskii pour de nombreuses discussions.

Note remise le 27 mars 1996, acceptée le 30 mai 1996.

Références bibliographiques

[1] **Yang C. C., 1978**. Open problems, In: *Complex analysis, Proc. of the SUNY Brockport Conf.*, Dekker, New York and Basel, p. 169.

[2] **Zaidenberg M. G. et Lin V. Ya., 1989**. Finiteness theorems for holomorphic mappings, In: *Encyclopedia of Math. Sci.*, 9. *Several Complex Variables,* 3, Berlin, Heidelberg, New York c.a., Springer Verlag, p. 113-172.

[3] **Moh T. T., 1981**. On certain group structure for polynomials, *Proc. Amer. Math., Soc.,* 82, n° 2, p. 183-187.

[4] **Dobbertin H. et Schmieder G., 1987**. Zur Charakterisierung von Polynomen durch ihre Null- und Einsstellen, *Arch. Math.,* 48, p. 337-342.

[5] **Walsh J. L., 1960**. *Interpolation and approximation by rational function in the complex domain,* Providence, Amer. Math. Soc.

[6] **Kolmogorov A. N., 1948**. A remark on the Chebyshev polynomials deviating least from a given function, *Uspechi Mat. Nauk,* 3, n° 1, p. 216-221.